Test

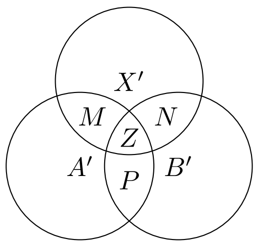
- **Exercițiul 1. a)** $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
  $\Leftrightarrow \chi_A(1 - (\chi_B + \chi_C - \chi_B\chi_C)) = (\chi_A(1 - \chi_B))(\chi_A(1 - \chi_C))$
  $\Leftrightarrow \chi_A - \chi_A\chi_B - \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C = (\chi_A - \chi_A\chi_B)(\chi_A - \chi_A\chi_C)$
  $\Leftrightarrow \chi_A - \chi_A\chi_B - \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C = \chi_A^2 - \chi_A^2\chi_C - \chi_A^2\chi_B + \chi_A^2\chi_B\chi_C$
  $\Leftrightarrow \chi_A - \chi_A\chi_B - \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C = \chi_A - \chi_A\chi_C - \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_B\chi_C$.

- **Exercițiul 1. b)** $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
  $\Leftrightarrow \chi_A(1 - \chi_B\chi_C)) = (\chi_A(1 - \chi_B)) + (\chi_A(1 - \chi_C)) - (\chi_A(1 - \chi_B))(\chi_A(1 - \chi_C))$
  $\Leftrightarrow \chi_A - \chi_A\chi_B\chi_C = \chi_A - \chi_A\chi_B + \chi_A - \chi_A\chi_C - (\chi_A - \chi_A\chi_B)(\chi_A - \chi_A\chi_C)$
  $\Leftrightarrow \chi_A - \chi_A\chi_B\chi_C = \chi_A - \chi_A\chi_B + \chi_A - \chi_A\chi_C - (\chi_A^2 - \chi_A^2\chi_C - \chi_A^2\chi_B + \chi_A^2\chi_B\chi_C)$
  $\Leftrightarrow \chi_A - \chi_A\chi_B\chi_C = \chi_A - \chi_A\chi_B - \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B - \chi_A\chi_B\chi_C$.

- **Exercițiul 2.** $((A \,\Delta\, D) \cup D \cup B) \cap C = B \Leftrightarrow (D \cup B) \cap C = B$. Dar, $D = A \cup B \cup C$, așa că $(A \cup B \cup C) \cap C = B \Leftrightarrow C = B$. Înlocuindu-l pe C cu B în $((A \,\Delta\, B) \cup C) \cap B = D$, obținem $((A \,\Delta\, B) \cup B) \cap B = D \Leftrightarrow (A \cup B) \cap B = D \Leftrightarrow B = D$. Înlocuindu-l pe D cu B în ultima relație dată, $((A \,\Delta\, D) \cup B) \cap A = D$, obținem $((A \,\Delta\, B) \cup B) \cap A = B \Leftrightarrow (A \cup B) \cap A = B \Leftrightarrow A = B$. Așadar, $A = B = C = D$.

  Am folosit de mai multe ori faptul că $(X \,\Delta\, Y) \cup Y = X \cup Y$. Această relație este echivalentă cu $(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) \cup Y = (X \setminus Y) \cup Y$, care este adevărată deoarece $(Y \setminus X) \cup Y = Y$.

- **Exercițiul 3.** Facem următoarele notații: $Z = A \cap B \cap X$, $M = (A \cap X) \setminus Z$, $N = (B \cap X) \setminus Z$, $P = (A \cap B) \setminus Z$, $A' = A \setminus (B \cup X)$, $B' = B \setminus (A \cup X)$ și $X' = X \setminus (A \cup B)$. Cum cele șapte mulțimi sunt disjuncte, putem rescrie $A \cap X = B \cap X = A \cap B$ drept $M \cup Z = N \cup Z = P \cup Z$, de unde $M = N = P = \varnothing$. De asemenea, $A \cup B \cup X = A \cup B$ devine $A' \cup B' \cup X' \cup Z = A' \cup B' \cup Z$, de unde $X' = \varnothing$. Cum $X = X' \cup M \cup N \cup Z = Z$, soluția este $X = Z$, adică $X = A \cap B$.



- **Exercițiul 4. a)** Din tabelul de mai jos, se observă că $\chi_{A \,\Delta\, B} = (\chi_A + \chi_B) \bmod 2$.

χ_A	χ_B	$\chi_{A \,\Delta\, B}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

  Prin urmare, $(A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C = A \,\Delta (B \,\Delta\, C)$
  $\Leftrightarrow ((\chi_A + \chi_B) \bmod 2 + \chi_C) \bmod 2 = (\chi_A + (\chi_B + \chi_C) \bmod 2) \bmod 2$
  $\Leftrightarrow (\chi_A + \chi_B + \chi_C) \bmod 2 = (\chi_A + \chi_B + \chi_C) \bmod 2$.

  Așadar, diferența simetrică este asociativă.

- **Exercițiul 4. b)** La punctul anterior am văzut că $\chi_{A \,\Delta\, B \,\Delta\, C} = (\chi_A + \chi_B + \chi_C) \bmod 2$. Generalizând, obținem că $\chi_{A_1 \,\Delta\, A_2 \,\Delta \cdots \Delta\, A_n} = (\chi_{A_1} + \chi_{A_2} + \cdots + \chi_{A_n}) \bmod 2$. Deci, $x \notin A_1 \,\Delta\, A_2 \,\Delta \cdots \Delta\, A_n$ dacă și numai dacă suma $\chi_{A_1} + \chi_{A_2} + \cdots + \chi_{A_n}$ este pară, adică dacă x se află într-un număr par de mulțimi A_i.

- **Exercițiul 5.** Cum polinomul f este de gradul al doilea, acesta are forma $f = aX^2 + bX + c$.

  1) $f(1) = 4 \Leftrightarrow a + b + c = 4$
  2) $f(-1) = 12 \Leftrightarrow a - b + c = 12$
  3) $f(2) = 7 \Leftrightarrow 4a + 2b + c = 7$

  Scăzând 2) din 3) obținem $3a + 3b = -5$, iar scăzând 1) din 3) obținem $3a + b = 3$. De aici, $b = -4$ și $a = \frac{7}{3}$. Întorcându-ne în 1), aflăm că $c = \frac{17}{3}$. Deci, $f = \frac{7}{3}X^2 - 4X + \frac{17}{3}$. În continuare, folosim Schema lui Horner pentru a afla restul împărțirii lui f la $X + 3$:

	$7/3$	-4	$17/3$
$X = -3$	$7/3$	-11	$116/3$

  Răspunsul este $\frac{116}{3}$.

- **Exercițiul 6. a)** Dezvoltăm cele două binoame folosind Binomul lui Newton:

$$\begin{aligned} f &= (X+i)^{2020} + (X-i)^{2020} \\ &= \sum_{k=0}^{2020} C_{2020}^k X^{2020-k} i^k + \sum_{k=0}^{2020} C_{2020}^k X^{2020-k} (-i)^k \\ &= \sum_{k=0}^{2020} C_{2020}^k X^{2020-k} (i^k + (-i)^k) \end{aligned}$$

  Deci, coeficientul lui X^{2020-k} din dezvoltarea lui f este $C_{2020}^k(i^k + (-i)^k)$. Cum C_{2020}^k este real, rămâne să-l analizăm pe $i^k + (-i)^k$:

$$i^k + (-i)^k = \begin{cases} +2 & \text{dacă } k \equiv 0 \pmod 4 \\ 0 & \text{dacă } k \equiv 1 \pmod 4 \\ -2 & \text{dacă } k \equiv 2 \pmod 4 \\ 0 & \text{dacă } k \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

  Așadar, coeficienții lui f sunt reali.

- **Exercițiul 6. b)** Conform Teoremei Împărțirii cu Rest, restul împărțirii lui $f = (X+i)^{2020} + (X-i)^{2020}$ la $g = (X^2-1)^2$ are forma $r = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Notăm câtul cu q. Avem:

  $x = +1 \Rightarrow f(+1) = g(+1)q(+1) + r(+1) \Rightarrow (+1+i)^{2020} + (+1-i)^{2020} = +a + b + c + d$
  $x = -1 \Rightarrow f(-1) = g(-1)q(-1) + r(-1) \Rightarrow (-1+i)^{2020} + (-1-i)^{2020} = -a + b - c + d$
  $\xRightarrow{(-)} c = -a$

  $f'(x) = g'(x)q(x) + g(x)q'(x) + r'(x)$
  $f'(x) = 4x(x^2-1)q(x) + g(x)q'(x) + r'(x)$
  $f'(x) = 2020(x+i)^{2019} + 2020(x-i)^{2019}$
  $r'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

  $x = +1 \Rightarrow 2020(+1+i)^{2019} + 2020(+1-i)^{2019} = 3a + 2b + c$
  $x = -1 \Rightarrow 2020(-1+i)^{2019} + 2020(-1-i)^{2019} = 3a - 2b + c$
  $\xRightarrow{(+)} c = -3a$

  $\Rightarrow a = c = 0$

  $(1+i)^{2020} + (1-i)^{2020} = b + d$
  $2020(1+i)^{2019} + 2020(1-i)^{2019} = 2b$

  $\Rightarrow b = 1010(1+i)^{2019} + 1010(1-i)^{2019}$
  $\Rightarrow d = (1+i)^{2019}(i - 1009) - (1-i)^{2019}(i + 1009)$

- **Exercițiul 7. a)** Notând termenul general al seriei date cu u_n, obținem:

$$\begin{aligned}
\ln u_n &= \ln \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{km-3}{km-1}\right)^{\alpha} \\
&= \alpha \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{km-3}{km-1} \\
&= \alpha \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left(\ln\left(1-\frac{2}{km-1}\right)+\frac{2}{km-1}\right)}_{\leq 2\left(\frac{2}{km-1}\right)^2} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{2\alpha}{km-1}}_{\sim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ (D)}}
\end{aligned}$$

...

- **Exercițiul 8. a)** $S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\ln\ln n}}_{a_n} x^n$

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\ln n}{\ln\ln(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\ln(n+1)}{n\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow R = 1$
S (AC) pentru $x \in (-1, 1)$.
S (D) pentru $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

1) $x = 1 \Rightarrow S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln\ln n}$ (D), pentru că $\frac{1}{\ln\ln n} > \frac{1}{n}$, iar $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ (D).

2) $x = -1 \Rightarrow S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln\ln n}$ (C), pentru că $\frac{1}{\ln\ln n}$ este descrescător și tinde la 0.

Deci, S este convergentă pentru $x \in [-1, 1)$.

- **Exercițiul 8. b)** $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-10}x^n}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{1}{3^{10}} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}}_{a_n} (\underbrace{3x}_{z})^n$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} 1/n!^{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} 1/e^{\ln n!^{1/n^2}} = \lim_{n\to\infty} 1/e^{n^{-2}\ln n!} \overset{(*)}{=} 1/e^0 = 1 \Rightarrow R = 1$
(*) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n!}{n^2} = 0$, deoarece $\frac{\ln n!}{n^2} < \frac{\ln n^n}{n^2}$, iar $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.
S (AC) pentru $z \in (-1, 1)$.
S (D) pentru $z \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

1) $z = 1 \Rightarrow S = \frac{1}{3^{10}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ (D), pentru că $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} > \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \frac{1}{n}$, iar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (D).

2) $z = -1 \Rightarrow S = \frac{1}{3^{10}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$ (C), pentru că $\sqrt[n]{n!}$ este descrescător și tinde la 0.

Deci, S este convergentă pentru $x \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

- **Exercițiul 8. c)** $S = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) x^n$

$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin \pi n = 0$
...

- **Exercițiul 8. d)** $S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3} x^n$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \cos\frac{1}{n} - 1\right)^{\frac{1}{\cos(1/n)-1}(\cos(1/n)-1)n^2} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\sin(1/n)}{-2(1/n)}} = e^{-1/2} \Rightarrow R = \sqrt{e}$

1) $x = \sqrt{e} \Rightarrow S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3} \sqrt{e}^n$ (D), pentru că $\lim_{n\to\infty} \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3} \sqrt{e}^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}}\right)^n \left(\cos\frac{1}{n}\right)^n = 1$.

2) $x = -\sqrt{e} \Rightarrow S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3} \sqrt{e}^n$ (D), pentru că $\lim_{n\to\infty} \left|(-1)^n \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3} \sqrt{e}^n\right| = 1$.

Deci, S este convergentă pentru $x \in (-\sqrt{e}, \sqrt{e})$.

- **Exercițiul 9.** Alegem șirul $(u_n)_{n>1}$, unde $u_n = \frac{1}{n\ln^2 n}$. Seria $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$ converge, pentru că $\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{2}{3\ln 2} \neq \infty$. Urmează să arătăm că $\sum_{n=2}^{\infty} u_n^{\alpha}$ (D). Pentru $\alpha \in (0,1)$, $\exists\,\epsilon > 0 : \frac{1}{(n\ln^2 n)^{\alpha}} > \frac{1}{(n\ln^2 n)^{1-\epsilon}}$. Dar $O((n\ln^2 n)^{1-\epsilon}) \subsetneq O(n)$, așa că $\frac{1}{(n\ln^2 n)^{\alpha}} > \frac{1}{n}$. Cum seria armonică este divergentă, rezultă că și $\sum_{n=2}^{\infty} u_n^{\alpha}$ diverge.

Șirul căutat trebuie să înceapă de la 1, așa că alegem

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n\ln^2 n} & \text{dacă } n > 1 \\ 0 & \text{dacă } n = 1 \end{cases}.$$

Am folosit faptul că $O((n\ln^2 n)^{1-\epsilon}) \subsetneq O(n)$. Acesta este adevărat pentru că $O(n^{1-\epsilon}) \subsetneq O(n)$ și $O(\ln^2 n) \subsetneq O(n^{1-\epsilon})$. Totuși, pentru o demonstrație mai riguroasă, putem calcula limita raportului dintre $(n\ln^2 n)^{1-\epsilon}$ și n:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{(n\ln^2 n)^{1-\epsilon}}{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^2 n}{n^{\epsilon}} \cdot \frac{1}{\ln^{2\epsilon} n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2\ln n}{\epsilon n^{\epsilon}} \cdot 0 \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\epsilon^2 n^{\epsilon}} \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

- **Exercițiul 10.** Avem trei cazuri:

1) $u_n = \frac{1}{O(n)}$. În acest caz, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (D), pentru că $u_n \geq \frac{1}{n}$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (D).

2) $\exists\,\epsilon > 1 : u_n = \frac{1}{\Omega(n^{\epsilon})}$ și $\frac{1}{O(n^{\epsilon+1})}$. În acest caz, $\frac{1}{n^{\epsilon+1}} \leq u_n \leq \frac{1}{n^{\epsilon}} \Leftrightarrow \frac{1}{n^{\epsilon}} \leq nu_n \leq \frac{1}{n^{\epsilon-1}}$. Cum $\epsilon - 1 > 0$, avem că $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\epsilon}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\epsilon-1}} = 0$, de unde și $\lim_{n\to\infty} nu_n = 0$.

3) $u_n = \frac{1}{\Omega(n^{\epsilon})}, \forall\,\epsilon > 1$. În acest caz, cum numitorul are ordinul de creștere mai mare decât orice funcție polinomială, este clar că $\lim_{n\to\infty} nu_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\Omega(n^{\epsilon})} = 0$.

- **Exercițiul 11.** Pentru a testa convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{n}}{n}$, vom verifica dacă integrala $I = \int_1^{\infty} \frac{\sin \sqrt{x}}{x}\, dx$ este finită. Făcând schimbarea de variabilă $t = \sqrt{x}$, obținem că $I = 2\int_1^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$. Integrala din urmă este finită tocmai pentru că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{x}$ este convergentă, iar de aici rezultă că și $I < \infty$, de unde $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{n}}{n}$ converge.

  Acum, rămâne de arătat că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{x}$ este convergentă. Aplicăm Criteriul lui Dirichlet. Alegem $y_n = \frac{1}{n}$ (acest șir este descrescător și tinde la 0) și

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin x = \frac{1}{2\sin 1} \sum_{k=1}^{n} 2 \sin k \sin 1 \\ &= \frac{1}{2\sin 1} \sum_{k=1}^{n} (\cos(k-1) - \cos(k+1)) \\ &= \frac{1}{2\sin 1} (\cos 0 + \cos 1 - \cos n - \cos(n+1)). \end{aligned}$$

  Deci, șirul $(S_n)_{n\geq 1}$ este mărginit, de unde rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{x}$ este convergentă.

- **Exercițiul 12.** Poate ajută faptul că, în dezvoltarea lui x_n, coeficienții fracțiilor $\frac{1}{2016^k}$ sunt cei din lista asta.

- **Exercițiul 13.** Am rezolvat pentru cazul în care $f(x) = x^{\alpha}$, unde $\alpha > 0$. În acest caz, $f^{-1}(x) = x^{1/\alpha}$. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}$ converge dacă și numai dacă $\alpha > 1$. Dar, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2-1/\alpha}}$ converge și ea dacă și numai dacă $2 - 1/\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha > 1$. Așadar, convergența unei serii implică și convergența celeilalte.

- **Exercițiul 15.** Pentru a testa convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^3}{n}$, verificăm dacă integrala $I = \int_1^{\infty} \frac{\sin x^3}{x}\, dx$ este finită. Făcând schimbarea de variabilă $t = x^3$, obținem că $I = \frac{1}{3}\int_1^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$. Am văzut deja la Exercițiul 11. că $3I < \infty$. Așadar, integrala I este finită, iar seria dată e convergentă.