Temă

1 TODO-ul

Trebuie să demonstrăm că strategia greedy din curs produce o soluție optimă pentru setul de bancnote $b = [1, 5, 10, 50, 100, 200, 500]$. Mai întâi, notăm cu a_x frecvența bancnotei de valoare x în soluția noastră.

Lema 1. *În orice soluție optimă, $a_1 \leq 4$.*

Demonstrație. Dacă am avea $a_1 \geq 5$, am putea schimba cinci bancnote de valoare 1 în una de valoare 5, obținând o soluție cu mai puține bancnote. □

Lema 2. *În orice soluție optimă, $a_5 \leq 1$.*

Demonstrație. Dacă am avea $a_5 \geq 2$, am putea schimba două bancnote de valoare 5 în una de valoare 10, obținând o soluție cu mai puține bancnote. □

Lema 3. *În orice soluție optimă, $a_{10} \leq 4$.*

Demonstrație. Dacă am avea $a_{10} \geq 5$, am putea schimba cinci bancnote de valoare 10 în una de valoare 50, obținând o soluție cu mai puține bancnote. □

Lema 4. *În orice soluție optimă, $a_{50} \leq 1$.*

Demonstrație. Dacă am avea $a_{50} \geq 2$, am putea schimba două bancnote de valoare 50 în una de valoare 100, obținând o soluție cu mai puține bancnote. □

Lema 5. *În orice soluție optimă, $a_{100} \leq 1$.*

Demonstrație. Dacă am avea $a_{100} \geq 2$, am putea schimba două bancnote de valoare 100 în una de valoare 200, obținând o soluție cu mai puține bancnote. □

Lema 6. *În orice soluție optimă, $a_{100} + a_{200} \leq 2$.*

Demonstrație. Presupunem prin reducere la absurd că există o soluție optimă în care $a_{100} + a_{200} \geq 3$. Conform lemei precedente, avem două cazuri:

Cazul 1: $a_{100} = 0 \Rightarrow a_{200} \geq 3$. În acest caz, putem înlocui trei bancnote de valoare 200 cu una de 500 și una de 100, obținând o soluție cu mai puține bancnote.

Cazul 2: $a_{100} = 1 \Rightarrow a_{200} \geq 2$. În acest caz, putem înlocui o bancnotă de 100 și două de 200 cu una de 500, obținând o soluție cu mai puține bancnote.

Așadar, presupunerea făcută este falsă. Deci, în orice soluție optimă, $a_{100} + a_{200} \leq 2$. □

În continuare, notăm cu $\max_i$ valoarea maximă pe care o pot însuma bancnotele de valori $b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}$ într-o soluție optimă. Obținem:

$$
\begin{aligned}
&\max_1 = 0 \\
&\max_2 = \max_1 + 4 \cdot 1 = 4 \\
&\max_3 = \max_2 + 1 \cdot 5 = 9 \\
&\max_4 = \max_3 + 4 \cdot 10 = 49 \\
&\max_5 = \max_4 + 1 \cdot 50 = 99 \\
&\max_6 = \max_5 + 1 \cdot 100 = 199 \\
&\max_7 = \max_5 + \max(0 \cdot 100 + 2 \cdot 200, 1 \cdot 100 + 1 \cdot 200) = 499
\end{aligned}
$$

Lema 7 (Lema de alegere greedy)**.** *Avem de plătit suma S, iar cea mai mare bancnotă de valoare mai mică sau egală cu S este b_i. Atunci, orice soluție optimă l trebuie să-l conțină pe b_i.*

Demonstrație. Presupunem prin reducere la absurd că există o soluție optimă l' care nu-l conține pe b_i. De aici deducem că l' conține doar bancnote mai mici decât b_i. Însă, am arătat mai devreme că, pentru orice i, $\max_i < b_i$. Cu alte cuvinte, în nicio soluție optimă bancnotele $b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}$ nu vor constitui o sumă mai mare sau egală cu b_i. Prin urmare, nu există nicio soluție optimă de forma l', deci presupunerea făcută este falsă. Așadar, orice soluție optimă îl conține într-adevăr pe b_i. □

2 Exercițiul 1.2) 1)

Valorile bancnotelor disponibile sunt $b = [1, 7, 8]$. Alegem suma $S = 14$. Strategia greedy ar genera soluția $\langle 8, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \rangle$, de lungime 7, pe când soluția optimă este $\langle 7, 7 \rangle$, de lungime 2.

3 Exercițiul 1.2) 2)

```
coinChangeGreedy(b, s) {
    l = <>;
    for (i = b.size() - 1; i >= 0; i--)
        while (s >= b[i]) {
            s -= b[i];
            l.pushBack(b[i]);
        }
    return l;
}
```